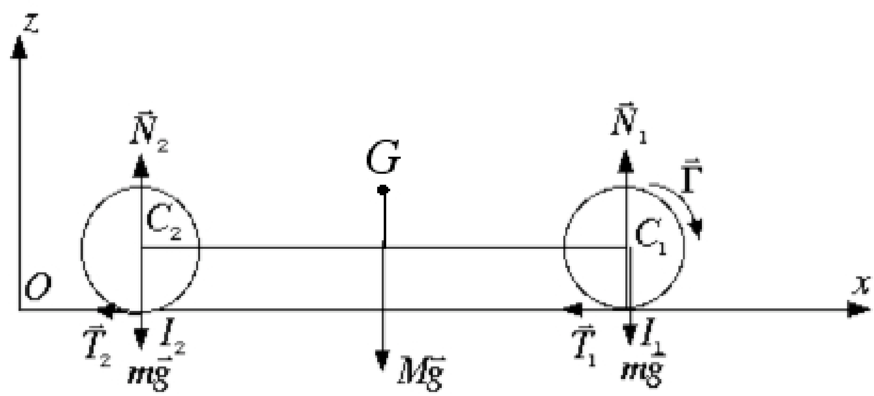
## Modèle d'une automobile.

On modélise une automobile par deux disques homogènes identiques de masse $m$ de rayon $a$, de moment d'inertie $J = (1/2)\, m\, a^2$ par rapport à leurs axes respectifs, de centre $C$, en contact avec un sol horizontal en $I$ qui exerce sur eux une force $\overrightarrow{N} + \overrightarrow{T} = N\,\overrightarrow{e_z} - T\,\overrightarrow{e_x}$ ($N$ et $T$ algébriques), le tout avec l'indice «1» pour l'essieu avant et «2» pour l'arrière. Ces disques sont solidaires, grâce à des liaisons parfaites, à un châssis (non représenté sur la figure ci-dessous) de masse $M$, de centre de gravité $G_0$ (non placé sur la même figure) à l'aplomb du milieu du segment $C_1C_2$ de longueur $2\,\ell$. Le centre de gravité $G$ du véhicule est donc lui aussi à l'aplomb du milieu de $C_1C_2$ et l'on note $b$ sa hauteur au dessus du sol. On modélise le moteur par un couple $\overrightarrow{\Gamma} = \Gamma\,\overrightarrow{e_y}$ exercé par la tige sur le disque «1» (il s'agit donc d'une traction[1]) et l'on note $F = \frac{\Gamma}{a}$. On suppose que les disques roulent sans glisser.




***Question 1 :***

***La modélisation proposée remplace un essieu à deux roues par une roue unique, confondant ainsi voitures et motos. Montrer que c'est raisonnable pour une voiture correctement chargée se déplaçant en ligne droite.***

Les seuls éléments qu'il faille connaître d'une interaction sont la somme des forces, la somme des moments et la somme des puissances car ce sont les seuls qui interviennent dans les théorèmes de la mécanique des solides. Soit donc un essieu à deux roues en contact avec le sol en deux points $I_G$ pour la roue gauche et $I_D$ pour la droite. Pour une voiture équilibrée (centre de gravité dans le plan médian en ligne droite, il y a symétrie et les deux roues sont soumises à la même force de contact que l'on note $\overrightarrow{n} + \overrightarrow{t}$ s'appliquant en $I_G$ et $I_D$.

La somme des forces est $2\,\overrightarrow{n} + 2\,\overrightarrow{t}$, soit en posant $\overrightarrow{N} = 2\,\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{T} = 2\,\overrightarrow{t}$, une somme $\overrightarrow{N} + \overrightarrow{T}$.

Le moment total en un point quelconque noté $A$ est

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(A) = \overrightarrow{AI_G} \wedge (\overrightarrow{n} + \overrightarrow{t}) + \overrightarrow{AI_D} \wedge (\overrightarrow{n} + \overrightarrow{t}) = (\overrightarrow{AI_G} + \overrightarrow{AI_D}) \wedge (\overrightarrow{n} + \overrightarrow{t})$$

Introduisons le milieu $I$ de $I_GI_D$ qui est aussi l'isobarycentre de ces deux points et introduisons $\overrightarrow{N}$ et $\overrightarrow{T}$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(A) = (2\,\overrightarrow{AI}) \wedge (\frac{1}{2}\,\overrightarrow{N} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{T}) = \overrightarrow{AI} \wedge (\overrightarrow{N} + \overrightarrow{T})$$

Quant à la puissance, elle est nulle dans l'hypothèse du non-glissement car les forces s'appliquent en des points de vitesse nulle.

[1] traction avant est un pléonasme.

On aurait obtenu les mêmes résultats avec une roue unique en contact avec le sol à l'aplomb du milieu de l'essieu (point $I$) subissant l'interaction $\overrightarrow{N}+\overrightarrow{T}$ ; c'est cet artifice qui permet de traiter voitures et motos d'une façon unifiée.

***Question 2 :***
***Quel est le lien entre les vecteurs rotation des disques et la vitesse de translation du véhicule ?***

Le châssis est un solide en translation, tous ses points ont la même vitesse, notée $\overrightarrow{V} = V\,\overrightarrow{e_x}$, en particulier les points $C_1$ et $C_2$, centres des roues. Les points des roues en contact avec le sol, $I_1$ et $I_2$, ont une vitesse nulle car il n'y a pas glissement. Le plan de figure est plan de symétrie donc les vecteurs rotation des roues, qui jouissent des propriétés de symétrie du champ magnétique, lui sont orthogonaux, on note $\overrightarrow{\omega}_1 = \omega_1\,\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{\omega}_2 = \omega_2\,\overrightarrow{e_y}$

La formule de changement de point permet d'affirmer

$$\overrightarrow{V_{C_1}} = \overrightarrow{V_{I_1}} + \overrightarrow{C_1 I_1} \wedge \overrightarrow{\omega_1}$$

$$V\,\overrightarrow{e_x} = \overrightarrow{0} + (-a\,\overrightarrow{e_z}) \wedge \omega_1\,\overrightarrow{e_y} = a\,\omega_1\,\overrightarrow{e_x}$$

d'où en projetant et en raisonnant de même pour l'autre roue :

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{V}{a} \qquad \text{(équation 1)}$$

***Question 3 :***
***En déduire l'expression de l'énergie cinétique du véhicule. Quelle est la puissance des forces de contact ? des forces de pesanteur ? des forces intérieures dans les liaisons ? du moteur ? En déduire l'accélération du véhicule.***

Attention, le véhicule *n'est pas* un solide mais l'assemblage de trois solides. Son énergie cinétique est la somme des énergies de ses trois constituants ; chacune est somme d'une énergie de translation et d'une énergie de rotation. Comme le châssis, lui, ne tourne pas, on arrive à :

$$E_{cin} = \frac{1}{2}\,M\,\overrightarrow{V_{G_0}}^2 + \frac{1}{2}\,m\,\overrightarrow{V_{C_1}}^2 + \frac{1}{2}\,J\,\omega_1^2 + \frac{1}{2}\,m\,\overrightarrow{V_{C_2}}^2 + \frac{1}{2}\,J\,\omega_2^2$$

$$E_{cin} = \frac{1}{2}\,M\,V^2 + \frac{1}{2}\,m\,V^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\,m\,a^2\right)\left(\frac{V}{a}\right)^2 + \frac{1}{2}\,m\,V^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\,m\,a^2\right)\left(\frac{V}{a}\right)^2$$

$$E_{cin} = \frac{1}{2}\,(M + 3\,m)\,V^2$$

Les forces de contact avec le sol ne travaillent pas car il n'y a pas de glissement (le point d'application de la force a une vitesse nulle, donc la puissance est nulle). Les forces intérieures au niveau des liaisons ne travaillent pas dans le modèle idéalisé d'une liaison parfaite. Le poids ne travaille pas car le mouvement est horizontal. Seul le couple moteur (interaction intérieure) travaille. Le couple $\overrightarrow{\Gamma} = \Gamma\,\overrightarrow{e_y}$ appliqué par le châssis sur la roue avant a une puissance $\overrightarrow{\Gamma}\cdot\overrightarrow{\omega_1} = \Gamma\,\frac{V}{a} = F\,V$ avec la définition donnée plus haut à $F$ et la puissance du couple opposé, exercé par la roue sur le châssis, est nulle car le vecteur rotation du châssis est nul. Bref la somme des puissance est $\mathcal{P} = F\,V$ et le théorème de l'énergie cinétique $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}$ donne

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\,(M + 3\,m)\,V^2\right) = (M + 3\,m)\,V\,\dot{V} = F\,V$$

d'où

$$\dot{V} = \frac{F}{M + 3\,m} \qquad \text{(équation 2)}$$

On trouve donc un mouvement uniformément accéléré. Bien sûr, ceci n'est valable que pour un véhicule lunaire en l'absence de frottements dus à l'air.

Remarquons que cette méthode permet de trouver l'équation du mouvement sans rien connaître des valeurs des forces de contact.

***Question 4 :***
***Appliquer le théorème de la résultante cinétique à l'automobile entière et projeter sur les axes. Calculer le moment cinétique de la barre et des disques par rapport à leur centres respectifs, en déduire le moment cinétique total calculé en G et appliquer le théorème des moments projeté sur Gy.***

Comprenons que l'on va maintenant et maintenant seulement s'intéresser à chercher la valeur des forces de contact pour discuter des hypothèses de travail.

Appliquons le théorème du centre de gravité (ou théorème de la résultante cinétique) au véhicule entier, ce théorème est valable que ce système soit solide ou non. Le produit de la masse totale $(M+2\,m)$ et de l'accélération est égale à la somme des forces extérieures, donc

$$(M+2\,m)\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}_G}{\mathrm{d}t} = (M+2\,m)\,\overrightarrow{g} + \overrightarrow{N_1} + \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{N_2} + \overrightarrow{T_2}$$

Projetons sur les axes, nous en déduisons, en injectant le résultat de l'équation 2

$$N_1 + N_2 = (M+2\,m)\,g \qquad \text{(équation 3)}$$

$$T_1 + T_2 = (M+2\,m)\,\dot{V} = \frac{M+2\,m}{M+3\,m}\,F \qquad \text{(équation 4)}$$

*Attention à ce qui suit : Le résultat n'est simple que si l'on voit une simplification à côté de laquelle on peut facilement passer !*

Le moment cinétique calculé au centre de gravité du véhicule est obtenu par sommation sur les trois solides. On applique le théorème de König pour les trois solides. Pour le châssis, immobile dans son référentiel barycentrique

$$\overrightarrow{\sigma}_{\text{châssis}}(G_0) = \overrightarrow{G_0G} \wedge \overrightarrow{P_{\text{châssis}}} + \overrightarrow{\sigma}_{\text{châssis}}(G)^* = M\,\overrightarrow{G_0G} \wedge \overrightarrow{V}$$

Pour les roues

$$\overrightarrow{\sigma}_1(G_0) = \overrightarrow{G_0C_1} \wedge \overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{\sigma}_1(C_1)^* = m\,\overrightarrow{G_0C_1} \wedge \overrightarrow{V} + J\,\overrightarrow{\omega}_1$$

$$\overrightarrow{\sigma}_2(G_0) = m\,\overrightarrow{G_0C_2} \wedge \overrightarrow{V} + J\,\overrightarrow{\omega}_2$$

*Remarque :* Ce n'est qu'en projection qu'on a le droit d'affirmer sans précaution que $\sigma = J\,\omega$ mais, ici, la symétrie de révolution montre que $\overrightarrow{\sigma}$ est sur l'axe et permet de passer à la relation vectorielle.

Par sommation, on a donc

$$\overrightarrow{\sigma}_{total}(G_0) = M\,\overrightarrow{G_0G} \wedge \overrightarrow{V} + m\,\overrightarrow{G_0C_1} \wedge \overrightarrow{V} + m\,\overrightarrow{G_0C_2} \wedge \overrightarrow{V} + J\,\overrightarrow{\omega}_1 + J\,\overrightarrow{\omega}_2$$

$$\overrightarrow{\sigma}_{total}(G_0) = (M\,\overrightarrow{G_0G} + m\,\overrightarrow{G_0C_1} + m\,\overrightarrow{G_0C_2}) \wedge \overrightarrow{V} + J\,\overrightarrow{\omega}_1 + J\,\overrightarrow{\omega}_2$$

Or, et c'est là le point-clef, par définition du centre de gravité du système, on a $(M\,\overrightarrow{G_0G} + m\,\overrightarrow{G_0C_1} + m\,\overrightarrow{G_0C_2}) = \overrightarrow{0}$ et donc

$$\overrightarrow{\sigma}_{total}(G_0) = J\,\overrightarrow{\omega}_1 + J\,\overrightarrow{\omega}_2 = 2\,\left(\frac{1}{2}\,m\,a^2\right)\,\left(\frac{V}{a}\,\overrightarrow{e_y}\right) = m\,a\,V\,\overrightarrow{e_y}$$

Le moment du poids du système calculé au centre de gravité du système est nul et le moment des autres forces extérieures est :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(G) = \overrightarrow{GI_1} \wedge (\overrightarrow{N}_1 + \overrightarrow{T}_1) + \overrightarrow{GI_2} \wedge (\overrightarrow{N}_2 + \overrightarrow{T}_2)$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(G) = (\ell\,\overrightarrow{e_x} - b\,\overrightarrow{e_z}) \wedge (N_1\,\overrightarrow{e_z} + T_1\,\overrightarrow{e_x}) + (-\ell\,\overrightarrow{e_x} - b\,\overrightarrow{e_z}) \wedge (N_2\,\overrightarrow{e_z} + T_2\,\overrightarrow{e_x})$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(G) = [\ell\,(N_2 - N_1) - b\,(T_1 + T_2)]\,\overrightarrow{e_y}$$

La projection sur $\overrightarrow{e_y}$ du théorème du moment cinétique en $G$ ($\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma}(G)}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathcal{M}}(G)$) donne

$$m\,a\,\dot{V} = \ell\,(N_2 - N_1) - b\,(T_1 + T_2)$$

$$\ell\,(N_2 - N_1) - b\,(T_1 + T_2) = a\,\frac{m}{M + 3\,m}\,F \qquad \text{(équation 5)}$$

***Question 5 :***
***Appliquer le théorème du moment cinétique au centre de gravité de chacun des disques considéré isolement.***

Comprenons qu'il faut aller plus loin car les trois équations (équation 3, équation 4 et équation 5) sont insuffisantes pour trouver quatre inconnues ($N_1$, $N_2$, $T_1$ et $T_2$). Il faut donc considérer isolément l'un au moins des solides constituant le véhicule. L'ennui est qu'il faut aussi introduire les forces d'interaction entre châssis et roues. Heureusement, les liaisons sont parfaites et les moments dynamiques projetés sur les axes sont nuls ce qui donne deux équations de plus sans inconnues supplémentaires et le système d'équations devient même redondant car l'accélération a été trouvée par une autre méthode. On n'oublie pas que le moment du poids de la roue, appliqué en $C$ est nul.

Pour la roue arrière

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J\,\omega_2) = \overrightarrow{e_y} \cdot [\overrightarrow{C_2 I_2} \wedge (\overrightarrow{N}_2 + \overrightarrow{T}_2)] = \overrightarrow{e_y} \cdot [(-a\,\overrightarrow{e_z}) \wedge (N_2\,\overrightarrow{e_z} + T_2\,\overrightarrow{e_x})] = -a\,T_2$$

$$\frac{1}{2}\,m\,a^2\,\frac{\dot{V}}{a} = -a\,T_2$$

$$T_2 = -\frac{m}{2}\,\dot{V} = -\frac{m}{2\,(M + 3\,m)}\,F \qquad \text{(équation 6)}$$

Pour la roue avant il faut tenir compte du couple exercé par le moteur, soit, compte tenu de la définition de $F$ :

$$\frac{1}{2}\,m\,a^2\,\frac{\dot{V}}{a} = -a\,T_1 + \Gamma = -a\,T_1 + a\,F$$

$$T_1 = F - \frac{m}{2}\,\dot{V} = F - \frac{m}{2\,(M + 3\,m)}\,F \qquad \text{(équation 7)}$$

***Question 6 :***
***Pour résoudre plus rapidement ces équations, on néglige*** $m$ ***devant*** $M$***, déduire dans cette approximation les expressions de*** $N_1$***,*** $N_2$***,*** $T_1$ ***et*** $T_2$***. La roue avant peut-elle décoller ? Et la roue arrière ? La roue arrière peut-elle glisser ? Et la roue avant ? Commentez et analysez l'influence des paramètres qui vous semblent pertinents.***

Reportons $m = 0$ de l'équation 2 à l'équation 7

$$\dot{V} = \frac{F}{M}$$

$$N_1 + N_2 = M\,g$$
$$T_1 + T_2 = F$$
$$\ell\,(N_2 - N_1) - b\,(T_1 + T_2) = 0$$
$$T_2 = 0$$
$$T_1 = F$$

outre $T_1 = F$ et $T_2 = 0$, on peut en déduire

$$N_2 + N_1 = M\,g$$
$$N_2 - N_1 = \frac{b}{\ell}\,F$$

d'où en effectuant la demi-somme et le demi-différence :

$$N_1 = \frac{1}{2}\,M\,g - \frac{b}{2\,\ell}\,F$$
$$N_2 = \frac{1}{2}\,M\,g + \frac{b}{2\,\ell}\,F$$

Au vu de ces expressions, $N_2$ ne peut pas s'annuler et la roue arrière ne décollera jamais. $N_1$ devient négatif si $F$ dépasse la valeur critique $F_c = \frac{\ell}{b}\,M\,g$ correspondant à une accélération critique $a_c = \dot{V}_c = \frac{F_c}{M} = \frac{\ell}{b}\,g$. Cela dit pour une voiture courante $\ell$ est supérieur à $b$ et l'accélération maximale largement inférieure à $g$ car un organisme non entraîné ne supporte pas de trop fortes accélérations donc le décollage de la roue n'est pas un réel souci.

D'autre part, $T_2$ est nul et les lois de Coulomb sont automatiquement vérifiées à l'arrière. A l'avant on veut, en appelant $f$ le coefficient de frottement, $|T_1| < f\,N_1$, soit

$$F < f\,\left[\frac{1}{2}\,M\,g - \frac{b}{2\,\ell}\,F\right]$$

ce qui remplace la force critique et l'accélération critique par

$$F_c^* = \frac{M\,g}{\frac{b}{\ell} + \frac{2}{f}} \qquad \text{et} \qquad a_c^* = \frac{g}{\frac{b}{\ell} + \frac{2}{f}}$$

Influence de $f$ : Si $f$ diminue (boue, verglas), $a_c^*$ diminue, on patine plus vite. D'accord, ce n'est pas un scoop mais maintenant, on sait en détail pourquoi.

Influence de $b$ et $\ell$ : si le rapport $b/\ell$ diminue, $a_c^*$ augmente. Une voiture «à tempérament sportif» est surbaissée.

***Question 7 :***
***Quel est l'intérêt de déplacer le centre de gravité vers l'avant, la distance entre roues roues restant inchangée ? Comment faire pour réaliser ce déplacement ?***

Supposons qu'on laisse la distance $2\,\ell$ entre roues inchangée. Notons $\ell_1$ et $\ell_2$ les distances horizontales entre roue avant et centre de gravité et entre roue arrière et centre de gravité.

Ces distances n'interviennent que dans le théorème du moment cinétique en $G$ et en relisant en diagonale la résolution qui précède, on voit facilement que l'on arrive à

$$N_2 + N_1 = M\,g$$
$$\ell_2\,N_2 - \ell_1\,N_1 = b\,F$$

d'où en résolvant ce système par votre méthode préférée et avec $\ell_1 + \ell_2 = 2\,\ell$ car c'est la distance entre roues :

$$N_1 = \frac{\ell_2\,M\,g - b\,F}{2\,\ell}$$
$$N_2 = \frac{\ell_1\,M\,g + b\,F}{2\,\ell}$$

Et la condition de non-glissement devient

$$F < f\,\left[\frac{\ell_2\,M\,g - b\,F}{2\,\ell}\right]$$

ce qui remplace la force critique et l'accélération critique par

$$F_c^* = \frac{f\,\ell_2\,M\,g}{2\,\ell + f\,b} \qquad \text{et} \qquad a_c^* = \frac{f\,\ell_2\,g}{2\,\ell + f\,b}$$

On permet de plus fortes accélérations sans patinage en déplaçant le centre de gravité vers l'avant, c'est-à-dire vers les roues motrices, par exemple en plaçant le moteur à l'avant.

***Question 8 :***
***Quel artifice de calcul peut-on utiliser pour étudier une propulsion[2] ?***

Il suffit de changer le signe de $F$, l'accélération change de signe et la voiture va en arrière. Dans le sens du mouvement c'est devenu une propulsion. Cette fois c'est la roue 2 qui peut décoller mais c'est encore la roue avant dans le sens du mouvement, par contre ce n'est plus la roue motrice et le décollage n'empêche pas de continuer à avancer («roue avant» des motards). La condition de non glissement reste formellement inchangée, mais en notant $F = -|F|$, on s'aperçoit que l'apparence est trompeuse. En effet la condition s'écrit de façon brute : $f$ le coefficient de frottement, $|T_1| < f\,N_1$, soit

$$|T_1| = |F| < N_1 = f\,\left[\frac{1}{2}\,M\,g - \frac{b}{2\,\ell}\,F\right]$$

mais avec $F = -|F|$, on arrive à

$$|F| < f\,\left[\frac{1}{2}\,M\,g + \frac{b}{2\,\ell}\,|F|\right]$$

ce qui remplace la force critique et l'accélération critique (en valeur absolue) par

$$F_c^* = \frac{M\,g}{\frac{2}{f} - \frac{b}{\ell}} \qquad \text{et} \qquad a_c^* = \frac{g}{\frac{2}{f} - \frac{b}{\ell}}$$

Une propulsion peut accélérer sans déraper plus qu'une traction (penser aux courses de dragsters).

*Remarque :* si l'on construit plus volontiers des tractions, c'est que la tenue de route en virage est bien meilleure et pour une raison simple : si l'on tire l'avant d'une voiture en biais, on la redresse et

[2]traction arrière est un oxymore.

si l'on pousse l'arrière d'une voiture en biais, on amplifie le phénomène et on finit dans le fossé, sauf à apprendre à contrebraquer.

***Question 9 :***

***Comment modifier le modèle pour étudier un*** $4 \times 4$ ***de même puissance ? Quel est, au vu des questions posées plus haut, l'intérêt du*** $4 \times 4$***, hormis la frime ?***

Il suffit d'exercer $\Gamma/2$ sur chacun des essieux, en relisant en diagonale ce qui précède, on se convainc[3] aisément qu'on arrive à

$$\begin{gathered}
\dot{V} = \frac{F}{M} \\
N_1 + N_2 = M\,g \\
T_1 + T_2 = F \\
\ell\,(N_2 - N_1) - a\,(T_1 + T_2) = 0 \\
T_2 = \frac{F}{2} \\
T_1 = \frac{F}{2}
\end{gathered}$$

On retrouve les mêmes valeurs de $N_1$ et $N_2$, donc l'accélération maximale avant décollage ne change pas, par contre la plus contraignante des deux conditions de non-glissement devient

$$\frac{|F|}{2} < f\,\left[\frac{1}{2}\,M\,g - \frac{a}{2\,\ell}\,|F|\right]$$

ce qui est plus favorable que pour un véhicule classique. Ceci explique que la capitale soit envahie de $4 \times 4$ car il est bien connu que ses rues sont constamment boueuses. Ceci explique aussi le grand nombre d'essieux moteurs d'une rame de métro ou de TGV pour permettre une forte accélération sans risque de glisser sur les rails.

[3]Vérifiez dans votre Bécherelle, c'est bien comme ça que ça s'écrit.